

单调性练习

一、填空题

1. 函数 $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + kx - \ln x$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ 上存在单调递增区间, 则实数 k 的取值范围是_____.

【答案】 $(2, +\infty)$

【难度】 0.85

【知识点】 由函数在区间上的单调性求参数、一元二次不等式在某区间上有解问题、利用导数求函数(含参)的单调区间

【分析】 求导, 利用函数在区间内的单调性转化为不等式能成立问题, 结合基本不等式求解.

【详解】 函数 $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$, 求得 $f'(x) = -x + k - \frac{1}{x} = \frac{-x^2 + kx - 1}{x}$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ 上存在单调递增区间,

$\therefore f'(x) = \frac{-x^2 + kx - 1}{x} > 0$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ 上有解, 即 $-x^2 + kx - 1 > 0$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ 上有解,

即 $k > x + \frac{1}{x}$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ 上能成立, 故 $k > \left(x + \frac{1}{x}\right)_{\min}$,

又 $\because y = x + \frac{1}{x} \geq 2$, 当且仅当 $x = 1$ 时取等号,

$\therefore k > 2$, 故实数 k 的取值范围是 $(2, +\infty)$.

故答案为: $(2, +\infty)$.

2. 函数 $f(x) = e^x \cdot (x-3)^2$ 的单调减区间是_____.

【答案】 $(1, 3)$

【难度】 0.85

【知识点】 利用导数求函数的单调区间(不含参)

【分析】 求导, 解不等式 $f'(x) < 0$ 即可.

【详解】 $f'(x) = e^x(x-3)^2 + 2(x-3)e^x = e^x(x-3)(x-1)$,

解 $f'(x) < 0$ 得 $1 < x < 3$,

故 $f(x)$ 的单调减区间是 $(1, 3)$.

故答案为：(1,3)

3. 已知函数 $f(x) = -ax^2 + \ln x$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减，则实数 a 的取值范围为_____.

【答案】 $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

【难度】 0.85

【知识点】 由函数在区间上的单调性求参数

【分析】 由题得出 $a \geq \frac{1}{2x^2}$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立，即可求解.

【详解】 由题知 $f'(x) = -2ax + \frac{1}{x} = \frac{-2ax^2 + 1}{x}$,

因为 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减，即 $y = -2ax^2 + 1 \leq 0 \Rightarrow a \geq \frac{1}{2x^2}$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立，

所以 $a \geq \frac{1}{2}$,

故答案为： $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

4. 函数 $f(x) = \frac{4x^2 - 7}{2 - x}$, $x \in [0, 1]$ 的值域为_____.

【答案】 $[-4, -3]$

【难度】 0.85

【知识点】 由导数求函数的最值（不含参）、用导数判断或证明已知函数的单调性、利用函数单调性求最值或值域、复杂（根式型、分式型等）函数的值域

【分析】 方法一：先利用分母令 $t = 2 - x$, $t \in [1, 2]$ 进行换元，将函数等价转化成函数

$y = f(x) = 4t + \frac{9}{t} - 16$ ，再利用均值不等式和函数单调性求出函数最值即可求值域；

方法二：利用导数判断函数的单调性即可求值域.

【详解】 方法一：

由 $f(x) = \frac{4x^2 - 7}{2 - x}$, $x \in [0, 1]$,

令 $t = 2 - x$, $t \in [1, 2]$, 则 $y = f(x) = \frac{4(2-t)^2 - 7}{t} = \frac{4t^2 - 16t + 9}{t} = 4t + \frac{9}{t} - 16$,

因为 $4t + \frac{9}{t} \geq 2\sqrt{4t \times \frac{9}{t}} = 12$ ，当且仅当 $4t = \frac{9}{t}$ 即 $t = \frac{3}{2}$ 时等号成立，所以 $y \geq -4$ ，

由于 $y = 4t + \frac{9}{t} - 16$ 在 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ 是单调递减，在 $\left(\frac{3}{2}, 2\right)$ 上单调递增，

且当 $t=1$ 时, $y=-3$; 当 $t=2$ 时, $y=-\frac{7}{2}$,

则此时 $y=4t+\frac{9}{t}-16$ 的最大值为 -3 ,

所以函数 $y=4t+\frac{9}{t}-16, t \in [1, 2]$ 的值域为 $[-4, -3]$,

即原函数 $f(x)=\frac{4x^2-7}{2-x}, x \in [0, 1]$ 的值域为 $[-4, -3]$;

方法二:

由 $f(x)=\frac{4x^2-7}{2-x}, x \in [0, 1]$, 求导得 $f'(x)=\frac{8x(2-x)+4x^2-7}{(2-x)^2}=\frac{-4x^2+16x-7}{(2-x)^2}=\frac{-4(x-2)^2+9}{(2-x)^2}$,

令 $f'(x)=0$, 在 $x \in [0, 1]$ 内解得 $x=\frac{1}{2}$,

当 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 在 $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递减,

当 $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 上单调递增,

而 $f(0)=-\frac{7}{2}, f(1)=-3, f\left(\frac{1}{2}\right)=-4$,

所以 $f(x)=\frac{4x^2-7}{2-x}, x \in [0, 1]$ 的值域为 $[-4, -3]$,

故答案为: $[-4, -3]$.

5. 函数 $y=x \cdot \ln x$ 的单调减区间为_____.

【答案】 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$

【难度】 0.85

【知识点】 导数的乘除法、利用导数求函数的单调区间 (不含参)、由对数函数的单调性解不等式

【分析】 利用导数求解函数的单调区间即可.

【详解】 函数 $y=x \cdot \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

又 $y'=\ln x+x \cdot \frac{1}{x}=\ln x+1$, 令 $y'<0$, 则 $\ln x+1<0$, 解得 $0<x<\frac{1}{e}$,

所以函数 $y=x \cdot \ln x$ 的单调减区间为 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$.

故答案为: $\left(0, \frac{1}{e}\right)$.

6. 已知 $f(x)=e^{x^2-2ax}$ 在 $[1, 3]$ 上是增函数, 则实数 a 的取值范围为_____.

【答案】 $(-\infty, 1]$

【难度】 0.85

【知识点】 由函数在区间上的单调性求参数、简单复合函数的导数

【分析】 根据题意，可得 $f'(x) \geq 0$ 在 $[1, 3]$ 上恒成立，根据指数函数、一次函数的性质，分析求解，即可得答案.

【详解】 由题意 $f'(x) = (e^{x^2-2ax})' \cdot (x^2 - 2ax)' = (2x - 2a)e^{x^2-2ax} \geq 0$ ，在 $[1, 3]$ 上恒成立，

因为 $e^{x^2-2ax} > 0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立，

所以只需 $x - a \geq 0$ 在 $[1, 3]$ 上恒成立即可，即 $a \leq x_{\min} = 1$ ，

所以实数 a 的取值范围为 $(-\infty, 1]$.

故答案为： $(-\infty, 1]$

7. 函数 $f(x) = 2^x - x \ln 2$ 的增区间是_____.

【答案】 $(0, +\infty)$

【难度】 0.85

【知识点】 利用导数求函数的单调区间（不含参）

【分析】 求出函数的定义域与导函数，再解关于导函数的不等式即可.

【详解】 函数 $f(x) = 2^x - x \ln 2$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，

又 $f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 - \ln 2 = (2^x - 1) \ln 2$ ，

令 $f'(x) > 0$ ，解得 $x > 0$ ，所以函数 $f(x) = 2^x - x \ln 2$ 的增区间是 $(0, +\infty)$.

故答案为： $(0, +\infty)$

8. (1) 若函数 $f(x) = 2x^2 - ax + 2$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增，则实数 a 的取值范围是_____；

(2) 若函数 $f(x) = 2x^2 - ax + 2$ 的单调递增区间为 $[1, +\infty)$ ，则实数 a 的值是_____.

【答案】 $(-\infty, 4]$ 4

【难度】 0.85

【知识点】 已知二次函数单调区间求参数值或范围、由函数在区间上的单调性求参数

【分析】(1) 根据二次函数的性质得出 $\frac{a}{4} \leq 1$ 求解即可.

(2) 根据二次函数的性质得出 $\frac{a}{4} = 1$ 求解即可.

【详解】(1) 函数 $f(x) = 2x^2 - ax + 2$ 的图象开口向上,

对称轴方程为 $x = -\frac{-a}{2 \times 2} = \frac{a}{4}$, 且函数在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $\frac{a}{4} \leq 1$, 解得 $a \leq 4$, 即实数 a 的取值范围是 $(-\infty, 4]$.

(2) 因为函数 $f(x) = 2x^2 - ax + 2$ 的单调递增区间为 $\left[\frac{a}{4}, +\infty\right)$,

所以 $\frac{a}{4} = 1$, 所以 $a = 4$.

故答案为: $(-\infty, 4]$; 4

9. 函数 $f(x) = -x^2 + (x-2)e^x + 2x + 5$ 的单调递减区间为_____.

【答案】 $(\ln 2, 1)$

【难度】0.85

【知识点】利用导数求函数的单调区间 (不含参)

【分析】求导, 令 $f'(x) < 0$, 求出不等式解集, 得到答案.

【详解】由题意知 $f'(x) = (x-1)e^x - 2x + 2 = (e^x - 2)(x-1)$,

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \ln 2$ 或 1 , 其中 $\ln 2 < 1$,

令 $f'(x) < 0$ 得 $x \in (\ln 2, 1)$, 所以函数的单调递减区间为 $(\ln 2, 1)$.

故答案为: $(\ln 2, 1)$

10. 若 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - ax + b$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $(-\infty, 3]$

【难度】0.85

【知识点】由函数的单调区间求参数

【分析】求得导函数, 根据导函数在给定区间上大于等于 0 恒成立, 求得 a 的取值范围.

【详解】 $\because f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - ax + b$, $\therefore f'(x) = x^2 + 2x - a$,

∵函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - ax$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增,

∴ $f'(x) = x^2 + 2x - a \geq 0$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上恒成立,

由于 $f'(x) = x^2 + 2x - a$ 在区间 $[1, +\infty)$ 上单调递增,

∴必须且只需 $f'(1) = 3 - a \geq 0$

解得 $a \leq 3$,

故答案为: $(-\infty, 3]$.

11. 若 $f(x) = (x^2 + 2x - a)e^x$ 在 $[-3, \infty)$ 上是单调递增函数, 则实数 a 的取值范围为_____.

【答案】 $(-\infty, -2]$

【难度】 0.85

【知识点】 由函数在区间上的单调性求参数

【分析】 求导, 利用导函数与单调性的关系, 结合二次函数的图象和性质求解即可.

【详解】 由题意可知 $f'(x) = (2x + 2)e^x + (x^2 + 2x - a)e^x = (x^2 + 4x + 2 - a)e^x$,

因为 $e^x > 0$ 恒成立,

所以 $f(x) = (x^2 + 2x - a)e^x$ 在 $[-3, \infty)$ 上是单调递增函数, 即 $g(x) = x^2 + 4x + 2 - a \geq 0$ 在 $[-3, \infty)$ 上恒成立,

因为 $g(x)$ 是一元二次函数, 对称轴为 $x = -\frac{4}{2 \times 1} = -2$,

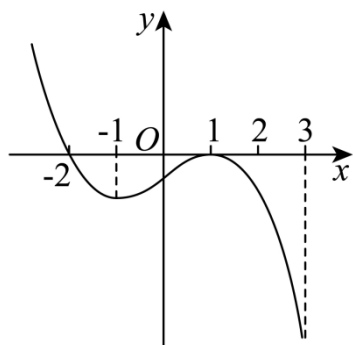
所以 $g(x)$ 在 $(-3, -2)$ 单调递减, 在 $(-2, +\infty)$ 单调递增,

所以 $g(x) \geq 0$ 在 $[-3, \infty)$ 上恒成立, 只需 $g(-2) = (-2)^2 + 4 \times (-2) + 2 - a \geq 0$, 解得 $a \leq -2$,

即实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -2]$,

故答案为: $(-\infty, -2]$

12. 已知函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象如图所示, 则函数 $f(x)$ 的极值点的个数有_____个



【答案】1

【难度】0.85

【知识点】函数与导函数图象之间的关系、函数（导函数）图像与极值点的关系

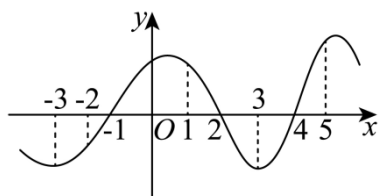
【分析】根据导函数的图象确定区间单调性，进而判断极值点个数.

【详解】由题图， $x < -2$ 时 $f'(x) > 0$ ， $x > -2$ 时 $f'(x) \leq 0$ ，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -2)$ 上单调递增，在 $(-2, +\infty)$ 上单调递减，故只有一个极值点.

故答案为：1

13. 函数 $y = f(x)$ 的导函数 $y = f'(x)$ 的图像如图所示，则下列说法正确的是_____.



- ①函数 $f(x)$ 在区间 $(1, 3)$ 上严格递减；
- ② $f(1) < f(2)$ ；
- ③函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取极大值；
- ④函数 $f(x)$ 在区间 $(-2, 5)$ 内有两个极小值点.

【答案】②④

【难度】0.85

【知识点】函数与导函数图象之间的关系、函数（导函数）图像与极值点的关系

【分析】先由图得函数 $f(x)$ 的单调性，进而逐一判断即可.

【详解】由图可知，当 $-3 < x < -1$ 时， $f'(x) < 0$ ，当 $-1 < x < 2$ 时， $f'(x) > 0$ ，

当 $2 < x < 4$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $4 < x < 5$ 时, $f'(x) > 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 区间 $(-1, 2), (4, 5)$ 递增上, 在区间 $(-3, -1), (2, 4)$ 上递减, 故①错误, ②正确;

所以 $f(x)$ 的极小值点为 -1 和 4 , 极大值点为 2 , 故③错误, ④正确.

故答案为: ②④.

14. $y = \frac{1}{2}x - \ln x$ 的单调递增区间为_____

【答案】 $(2, +\infty)$

【难度】 0.85

【知识点】 利用导数求函数的单调区间 (不含参)

【分析】 根据导函数为正得出函数增区间.

【详解】 因为 $y = \frac{1}{2}x - \ln x, x > 0$, $y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} > 0$, 所以 $x > 2$.

单调递增区间为 $(2, +\infty)$.

故答案为: $(2, +\infty)$

15. 函数 $f(x) = x - 3\ln x + 1$ 的单调递增区间为_____.

【答案】 $(3, +\infty)$

【难度】 0.85

【知识点】 利用导数求函数的单调区间 (不含参)

【分析】 利用导数求函数的递增区间即可.

【详解】 由题设 $f'(x) = 1 - \frac{3}{x}$, 令 $f'(x) > 0 \Rightarrow x > 3$, 即 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(3, +\infty)$.

故答案为: $(3, +\infty)$